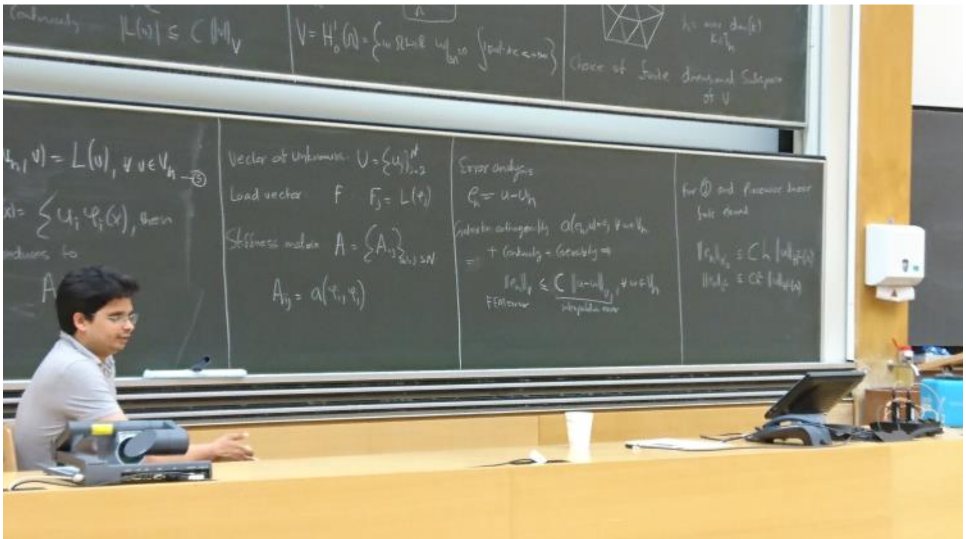
NPDE Fragen pt1

Dienstag, 1. August 2017   09:51

1) In der letzten Vorlesung hat Mishra eine Zusammenfassung des ganzen Stoffs gemacht. Im Anhang steht auf der Tafel ganz rechts dass die Errornorm H01 <= const*meshsize*Errornorm H2. Hast du eine Idee wieso H2 und was das Bedeutet?
2) Wie schätzt man für einen gegebene Equation die Konvergenz von FEM ab? Ist die für linfem immer die selbe und für quadfem immer die selbe usw.?
3) Siehe Anhang tmp.png, ein Auszug aus der Prüfung von 2014. Woher kommt das "1 + log x0 + t" und wieso nimmt man das minimum?
4) In manchen Aufgaben kommt ein \partial n vor. Was ist das? Siehe Anhang n.jpg aus der Prüfung von 2015. Ich habe dazu auch eine Frage ins Bild im Anhang geschrieben, um die Formel einfacher darzustellen.

Aus <https://mail.ethz.ch/owa/?ae=Item&a=Open&t=IPM.Note&id=RgAAAACywSirx9o4TokMBJOK5wArBwDpKWuPrJK3TrMlaPjolIssAAAAMlMYAADpKWuPrJK3TrMlaPjolIssAAAH1WwcAAAA&pspid=_1501573244039_400543832>



Galerkin.JPG

initial-boundary value problem (IBVP) with flux (spatial) boundary conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \gamma u &= 0 && \text{on } \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{on } \Omega \times \{0\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

with $\gamma > 0$ constant.

Notice that the boundary condition given in the second equation in (3.1) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \gamma u = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u \qquad\qquad &= 0 \quad \text{on } \{1\} \times (0,T] \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \gamma u = \frac{\partial u}{\partial(-x)} + \gamma u = -\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u &= 0 \quad \text{on } \{0\} \times (0,T]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Why is $\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u$?

n.jpg

(4a) * Write down the equation of characteristics of (4.1) and sketch characteristic curves in the sub-domain $[-1, 2]$ up to time $t = 1$. Use the equation of characteristics to derive an expression for the exact solution of (4.1) in terms of initial data $u_0(x)$.

HINT: For the characteristics equation, do not forget to specify the initial conditions.

HINT: The solution to ODE of the form $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \alpha x(t)$ is given by $x(t) = x(0)\exp(\alpha t)$ for $\alpha \neq 0$.

HINT: To find the characteristic curves with starting point $0 < x_0 < 1$ and to find the solution $u(x,t)$ with $x > 0$ and $1 + t > x$, you will need to carefully analyze what happens at $x = 1$.

Solution: The characteristics equation for the equation (4.1) are,

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ x & \text{if } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x. \end{cases} \quad \text{with} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Integrating all three cases, we obtain

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{if } x_0 \leq 0, \\ \min(x_0 \exp(t), 1 + \log x_0 + t) & \text{if } 0 < x_0 < 1, \\ x_0 + t & \text{if } 1 \leq x_0. \end{cases}$$

Since the solution is constant along characteristic curves $x(t)$, it is given by

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{if } x \leq 0, \\ u_0(x\exp(-t)) & \text{if } 0 < x < 1 \\ u_0(\exp(x - t - 1)) & \text{if } 1 \leq x < 1 + t, \\ u_0(x - t) & \text{if } x > 0 \text{ and } 1 + t \leq x. \end{cases}$$

tmp.jpg

NPDE Fragen pt2

Dienstag, 1. August 2017 09:53

1.) In der VL wurde mal erwähnt "it is easy to check that ... is a weak solution of ... ". Wie überprüft man das *easy*? Beispielsweise für die inviscid Burgers equation.

2.) Halten die 'einfachen' Ableitungsregeln wie wir sie schon im Gymnasium hatten - z.B. $d(u (v(x)))/dx = du/dx (v(x)) * dv/dx (x)$ - auch für partielle Ableitungen? Also wenn u von x und t abhängig ist, ist $u(v(x,t))$ partiell nach x abgeleitet gleich $\partial u/\partial x (v(x,t)) * \partial v/\partial x (x,t)$?

3.) Bei der Herleitung für Weak solutions (3.15) in den Lecture notes ist die test function phi definiert als smooth und $\in C_C^1(R \times R+)$. Das heisst, dass phi ausserhalb eines subsets von $R \times R+$ verschwindet. ist das die korrekte definition von compact support? Wenn ja, wieso bedeutet das, dass die funktion auf den boundaries der domain (hier $R \times R+$) verschwindet? vielleicht enthält das subset ja einen Teil des Randes?

Dass compact support das bedeutet, dessen bin ich mir eigentlich ziemlich sicher...

4.) Wieder bei (3.15). Weshalb ist (als Folge vom compact support) das zweite Integral nicht gleich 0? Das integral über R geht von negativ unendlich bis positiv unendlich, kann also auch als $(U0(\infty) \varphi(\infty,0)) - (U0(-\infty)\varphi(-\infty,0))$ berechnet werden. und phi ist auf der boundary null.

Genau genommen ja auf der boundary von $(R \times R+)$, aber wenn ich mir eine Zahlengerade vorstelle für R und senkrecht dazu ein Strahl für R+, um mir somit $(R \times R+)$ vorzustellen, hätte ich gesagt dass positiv und negativ infinity auf der Boundary liegen....

5.)

Bei der Burgers Equation (3.2, 3.3) wird $u*\partial u/\partial x$ zu $\partial(1/2\, u^2)/\partial x$.

Die Begründung ist vermutlich $\partial(1/2\, u^2)/\partial x = \partial f/\partial u * \partial u/\partial x = u * \partial u/\partial x$.

Aber die motivation vom ganzen Thema mit weak solutions ist ja, dass u nicht differenzierbar sein könnte... wieso ist dann diese Herleitung i.O. wenn die paritelle Ableitung von u nach x evt gar nicht existiert?

6.) bzgl Stoff Serie 5

Wir benutzen ja das Kriterium ($U_L > U_R$) um zu entscheiden, ob es einen Schock gibt und wir Rankine-Hugoniot verwenden, oder eine Rarefaction. Kann es vorkommen, dass das Kriterium zwar zum Anfangszeitpunkt erfüllt ist, aber nacher nicht mehr? (Ich denke das ist, was vorkommt in 1.a) iv))

Müssen wir in diesem Fall besonders vorgehen, oder lösen wir einfach mal für den Anfangszustand und schauen nacher, wo es probleme gibt (und falls es Probleme gibt, dort ein neues Riemannproblem lösen)?

7.) Zum spezifizieren von trial- und test-space für die variational formulation

Wieso muss die Derivative square integrable sein? Letztendlich geht es ja darum, dass das integral existiert, das wir brauchen, und nicht ein integral vom produkt der abgeleitetend testfunktion mit sich selbst. Wieso also H^1 ?

8.) In den alten Prüfungen von '15 und '14 kommen Aufgaben vor, in denen man coerciveness der Bilinearen Form und continuity von der bilinearen und der linearen form zeigen muss, um Lax-milgram anzuwenden und damit die unique existence einer weak solution zu zeigen [1]. Das kam mir unbekannt vor (nicht sicher ob ich das vergessen habe oder ob wir das nicht behandelt haben). Wird das für uns auch Prüfungsrelevant sein oder hatten die Jahre vor uns Stoff, den wir nicht hatten?

[1]: Ist es überhaupt eine weak solution, oder sagt Lax-milgram es gäbe eine strong solution? Die lecture notes (Theorem 5.2.1) reden einfach von einer solution. Ausserdem steht Lax-Milgrams Theorem nicht im Skript... nur dass damit die existenz der Lösung folgt (Remark 5.2.1). Im Internet finde ich einige Formulierungen aber die scheinen recht unterschiedlich. Was besagt das Lax-Milgram Lemma, das wir hierfür benutzen sollten?

Und... in den Lösungen wird Poincaré verwendet. Davon gibt es anscheinend auch mehrere Varianten. Geht es bei uns einfach um die "klassische Poincaré-Ungleichung"? Wikipedia formuliert die okay, aber etwas umständlich. Wie würdest du die Aussage intuitiv formulieren? Beispielsweise die Bedingung mit Lipschitz-Rand wirkt wie etwas, was wir einfach voraussetzen würden (auch wenn ich nicht wirklich weiss was das heisst)?

9.) HS14: 3c) Solution: The CFL condition is violated, deshalb ein blow-up. Klar. Aber woher weiss man, dass man Delta t hier als h^2 wählen müsste?

10.) Was genau ist der "support of solution u"? Ich nehme an, das hat mit compact support zu tun. Ist das also einfach das subset auf welchem u nicht verschwindet?

11.) Continuity für die Bilinearform ist definiert in Theorem 5.2.1 als

a is continuous, i.e. $|a(u,v)| \leq r\, ||u||_V\, ||v||_V$, for $r>0$

Wieso besagt das continuity - also wie macht das intuitiv Sinn?
12.) Can we state anything about the relation between the H01 Norm and the L2 norm?
By their definitions, the H1 norm of something is always bigger or equal than the L2 norm of that. I tried to find some similar statement for H01 but didn't manage to (see attachment).
13.) Similarly, can we state anything about the relation between the H01 Norm and the H1 Norm? Are those the same value where they are both defined?
Ich habe keine Ahnung wieso ich die letzten beiden Fragen auf Englisch geschrieben habe, ich habe eigentlich nicht copy-pasted, nur abgeschrieben aus meinen Notizen X)

Aus <https://mail.ethz.ch/owa/?ae=Item&a=Open&t=IPM.Note&id=RgAAAACywSirx9o4TokMBJOK5wArBwDpKWuPrJK3TrMlaPjoIlssAAAAMlMYAADpKWuPrJK3TrMlaPjoIlssAAAH1WwdAAAA&pspid=_1501573244039_400543832>

Is the norm in H_0^1 always bigger than in L^2?. The norm in H^1 obviously is, but if we take the norm definitions and apply green, then we get

$$\underbrace{-\int_\Omega f \cdot f\,dx}_{<0 \text{ because norm is } >0} = \underbrace{-\int_{\partial\Omega} F \cdot f \cdot \vec{n}\,dS}_{0} + \underbrace{\int_\Omega F \cdot \nabla f \quad dx}_{\Rightarrow \text{negative}}$$

and thus for H_0^1 norm to be larger than L^2 norm, then we would have to show that $\int_\Omega F \cdot \nabla f \quad dx + \int (f')^2 dx > \int_\Omega f \cdot f \quad dx$.

Yet this was used in the script at (4.12). Does this always hold?

tmp..jpg

Antworten 1 - 7

Dienstag, 1. August 2017 09:55

1. Weiss nicht genau, was du damit meinst, aber wenn du eine mögliche
Lösung der PDE hast und du die Herleitung der Weak Form "rückwärts" anwendest,
dann gelten alle Schritte auch in diese Richtung, falls deine Lösung
genug oft differenzierbar ist, i.e. du hast dann so ein Integral mit deiner
PDE mal eine Test-Funktion.
2. Ja, diese gelten.
3. compact support ~= nur ungleich Null auf einer "endlichen" Teilmenge des
Gebietes, daher phi=0 für x = +-Unendlich. Aber nicht unbedingt phi = 0 bei t = 0,
sonst würde der 2. Term verschwinden,i.e. phi(x,0) = 0.
4. Siehe 3., der compact support kann keine Punkte +-Unendlich enthalten.
Weiss nicht, wieso ganz präzise.
5. In diesem Fall erfüllt die schwache Lösung die PDE nicht in allen Punkten, z.B.
bei einem Schock, da dort die Ableitung nicht definiert ist. Dann ist auch
egal, ob in der PDE ∂(1/2 u^2)/∂x oder u * ∂u/∂x steht, da beide Ausdrücke
Ableitungen der Lösung u enthalten.
6. Ja, dies könnte vorkommen, ist aber nicht ganz einfach, wie eben in 1.a.4.
Es ist einigermassen einfach, wenn 2 Schocks aufeinander treffen,
dann bleibt es ein Schock, aber wie im oben genannten Beispiel kann auch z.B.
eine Rarefaction auf einen Schock treffen, was die Schock-Geschwindigkeit
beeinflusst. Oder eine Rarefaction könnte auf eine Rarefaction treffen, was
wahrscheinlich der schwierigste Fall ist.
7. Wenn wir z.B. die Poisson Gleichung haben \Delta u = 0,
dann kommen im Integral \int \nabla u \nabla v dx zwei
Gradienten vor, und wir mit "allen" Testfunktionen v testen beinhaltet
dies auch v = u, also im Integral \int |\nabla u|^2 dx, somit muss
dies endlich sein.

Aus <https://mail.ethz.ch/owa/?ae=Item&a=Open&t=IPM.Note&id=RgAAAACywSirx9o4TokMBJOK5wArBwDpKWuPrJK3TrMlaPjolIssAAAAMlMWAADpKWuPrJK3TrMlaPjolIssAAAH1TmPAAAJ&pspid=_1501573244039_400543277>

Follow-Up Frage zu 7

Wieso reicht es aus, dass es mit genau dieser Testfunction geht? Wieso müssen wir nicht auch für jede andere Testfunction garantieren, dass das Integral existiert?
Antwort: Weil es so für jede testfunction im Space H^1 existiert, das reicht, das sind alle.

Antworten 8 - 13

Freitag, 11. August 2017 13:31

Hi Eric,
Hier ein paar weitere Antworten.
8.) In den typeset lecture notes wird ein paar mal auf
das Lax-Milgram Lemma, die Poincaré-Ungleichung und die Cauchy-Schwartz
Ungleichung verwiesen, aber nie genauer definiert, obwohl die
eigentlich wichtig, für genau solche Aufgaben wären, also ich würde diese
auf die Zfsg schreiben.
Lax-Milgram besagt, dass die PDE in der Variational Formulation
genau eine Lösung (uniqueness and existence) besitzt unter
gewissen Bedingungen.
Bei Poincare würde ich die Version vom Englischen Wikipedia benutzen,
||u||_L^p <= C ||Grad u||_L^p
(unter geeigneten Bedingungen)
9.) In den typeset lecture notes unter (6.66) findest du für
die heat-equation, Delta t <= (Delta x)^2 /2 = h^2 / 2.
Ich nehme an, dies ist ein Fehler in der Lösung.
10.) Ja, der Support einer Funktion ist die Menge an der sie nicht verschwindet.
11.) Das ist mir auch nicht klar.
12.) Dies folgt aus der Poincare-Ungleichung, da ||Grad u||_L2 = ||u||_H01,
siehe vielleicht dazu
http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/NPDE/NPDE16.pdf,
Theorem 2.3.31.
13.) Aus der Definition der H1-Norm folgt direkt, dass ||u||_H01 <= ||u||_H1,
sowie ||u||_L2 <= ||u||_H1.
Soviel zu den ersten Fragen,
ich werde die restlichen in einem weiteren Mail beantworten.

Aus <https://mail.ethz.ch/owa/>

Herleitung Weak Solution

Dienstag, 1. August 2017 09:54

Zu 3.15:
Du nimmst 3.4 und multiplizierst die Gleichung mit einer Testfunktion \phi. Dann integrierst du über den ganzen Bereich, x von -\infty bis +\infty und t von 0 bis \infty. Dann wendest du Partielle Integration an so dass die Ableitung jeweils nur noch bei der Testfunktion \phi vorkommt.
Dabei entstehen Terme, welche bei +/- \infty ausgewertet werden und da das \phi kompakten Support hat gilt \phi(+/- \infty) = 0, dann bleibt noch der Term bei t=0, -\int_R U(t=0,x) \phi(t=0, x) dx.
Dann noch die Gleichung mit -1 multiplizieren und du hast das gewünschte Ergebnis.

Von: Mink Eric
Gesendet: Donnerstag, 6. Juli 2017 18:14
An: Baumann Christian
Betreff: Weak Solution Herleitung

Hi Christian
Ich habe Verständnisprobleme wie man im Skript auf (3.15) kommt. Ca seite 27 im PDF.
Gibt es vielleicht irgendwo eine step-by-step Umformung?
Als erster Schritt wird vermutlich das Integral in beide Richtungen über (3.4) genommen, aber wie wird danach partiell integriert?

Aus <https://mail.ethz.ch/owa/?ae=Item&a=Open&t=IPM.Note&id=RgAAAACywSirx9o4TokMBJOK5wArBwDpKWuPrJK3TrMlaPjoIlssAAAAMlMYAADpKWuPrJK3TrMlaPjoIlssAAAH1WwdAAAA&pspid=_1501573244039_400543832>

NPDE Fragen pt 3

Dienstag, 1. August 2017 16:01

ungestellt

Find $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = g\}$ such that (1.4)

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{:=a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} h(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S}_{:=l(v)}, \quad \text{for all } v \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega), \tag{1.5}$$

where $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = 0\}$.

(1b) Suppose now for this subtask that $h = 0$. Show that the solution to the variational formulation in (1a) exists and it is unique.

HINT: Use Lax-Milgram Lemma.

Solution: Since u does not satisfy homogeneous Dirichlet boundary conditions on Γ_D, before applying Lax-Milgram Lemma we use the offset function technique. Indeed, the variational formulation can be restated as:

$$\begin{aligned}&\text{Find } u = u_0 + u_g,\ u_0 \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega),\ u_g|_{\Gamma_D} = g, \text{ such that}\\ &a(u_0, v) = l(v) - a(u_g, v) := \tilde{l}(v) \quad \text{for all } v \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega),\end{aligned}$$

with bilinear and linear form defined as in (1.4).
We have to prove that the hypothesis of the Lax-Milgram Lemma are fulfilled considering $\tilde{l}$ instead of l as right-hand side:

- continuity of the bilinear form:

  $$|a(u_0, v)| \leq |u_0|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)} + C_1\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C_1)\|u_0\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

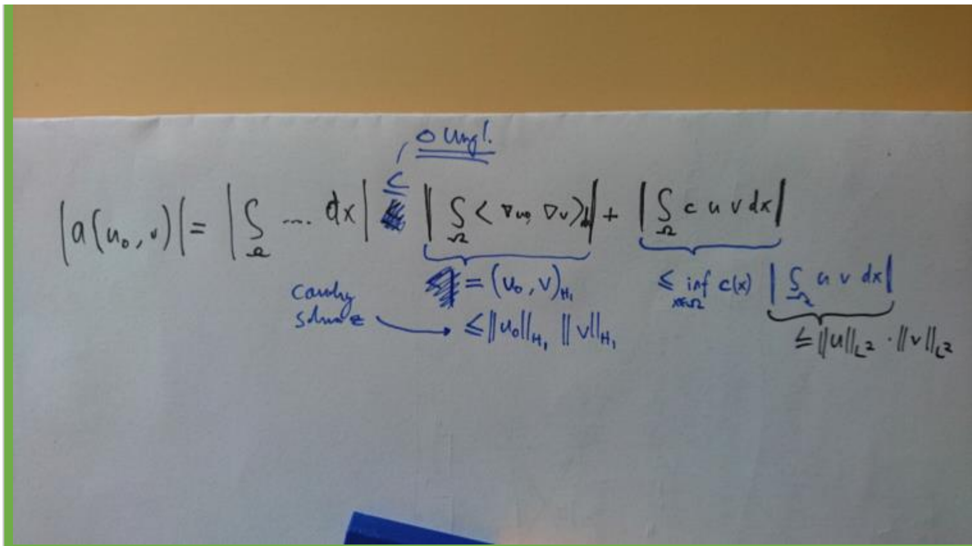
  where $C_1 := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} c(\boldsymbol{x})$ and we used the Cauchy-Schwarz inequality. Alternatively, one can use Poincaré's inequality.

gauchy-schwarz has been applied on the first summand in the bilinear forms integral.
Regarding the second part of the intermediate result, $C_1 \left|\left|u_0\right|\right|_{L^2(\Omega)} \left|\left|v\right|\right|_{L^2(\Omega)}$, I realized I mostly saw the L2-Norm squared.

I know $\left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right| \ \left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right| \ \mathrm{dx}$. Is the L2-Norm then defined as

$\left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega \left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right| \ \left|\left|\mathrm{f(x)}\right|\right| \ \mathrm{dx}}$?

In the above example, it seems more like it's defined somehow so that $\int_\Omega u(x)v(x)dx = \left|\left|u(x)\right|\right|_{L^2(\Omega)}\left|\left|v(x)\right|\right|_{L^2(\Omega)}$.
What is the correct definition (Wikipedia doesn't help me much here)? And how did the solutions in this example reach the intermediate result? (FS2014, 1.b))
I would guess this was done using the poincaré-inequality, but then the solution wouldn't write "alternatively"....



(EMP) Das bild + Defintionen Norm, Inner Product, Cauchy-Schwarz, Poincaré

Me: "Nei das hilft nöd würkli, ich verstah glaub nur jede zweiti schritt.
Drüecksunglichig gsehni. Denn seisch de linki summand seg ⟨ u, v ⟩ in H1 will?
Gauchy-Schwarz druf agwandt isch klar.
Rechte summand seg chliner als s infimum... wieso? Mitem supremum würs mmn sinn mache, jedefalls solang c>0 gilt.
Nacher machsch vermuetli mit de gliche Begründig wieder Cauchy-Schwarz, aber das gsehni au nonig. D L2-Norm isch definiert als d wurzle vom integral vom skalarprodukt mit sich sälber oder? Wenn ja isch mini frag glaub eifach wie mer vo dem druf chunt wie s Skalarprodukt in H1 bzw L2 definiert isch.

Nach allem willsch poincaré mache zum nacher chönne säge |a(u,v)| ≤ (C+1)*H1-Norm(u)*H1-Norm(v), oder? s C wär ja da eifach "sup c(x)".

Aber in de Lösig staht ja Cauchy-Schwarz ...blahblah... alternatively pointcaré. Aso wenn mir beid benutzed isches ja vermuetli nöd so wies d Löösig meint"

A: kei Ahnig wie ohni Poincaré

8

You need to know the definition of the two norms:

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx$$

and

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2.$$

using these Definitions
given Bilinear Form a:

Find $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = g\}$ such that (1.4)

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{:=a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} h(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}S}_{:=l(v)}, \quad \text{for all } v \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega), \tag{1.5}$$

where $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = 0\}$.

I would argue that $a(v,v) = |v|^2_{H^1(\Omega)}$ by applying the definition of the H1-Norm.

- coercivity of the bilinear form:

$$a(v,v) \geq |v|^2_{H^1(\Omega)} + C_2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min\{1, C_2\}\|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

with $C_2 := \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} c(\boldsymbol{x}) > 0$. Alternatively, one can simply observe that $|v|^2_{H^1(\Omega)} + C_2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq |v|^2_{H^1(\Omega)}$, which is sufficient thanks to Poincaré's inequality.

So where does the yellow part come from?
Probable Answer: We cannot simply argument with the Norm definition, because of that factor c. Thus, we need to use Cauchy-Schwartz

"Alternatively, one can simply observe that $|v|^2_{H^1(\Omega)} + C_2||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq |v|^2_{H^1(\Omega)}$, which is sufficient thanks to Poincaré's inequality"
Why is Poincaré needed for this? The definition of coerciveness is $\exists\alpha > 0, such\ that\ |a(v,v)| \geq \alpha||v||^2_V \quad (Theorem\ 5.2.1)$.
So, if we have $a(v,v) \geq |v|^2_{H^1(\Omega)}$, we can let $\alpha = 1$ and fulfill this definition, right?

What is the difference between the following two marked norm notations?

- coercivity of the bilinear form:

$$a(v,v) \geq |v|^2_{H^1(\Omega)} + C_2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min\{1, C_2\}\|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

with $C_2 := \inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega} c(\boldsymbol{x}) > 0$. Alternatively, one can simply observe that $|v|^2_{H^1(\Omega)} + C_2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq |v|^2_{H^1(\Omega)}$, which is sufficient thanks to Poincaré's inequality.

EMP: dunno. Left one seems wrong-ish

- continuity of the linear form:
  we have

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

(where we used the Cauchy-Schwarz inequality); thus, thanks to the continuity of $a(\cdot,\cdot)$:

how is that step by Cauchy-Schwarz? What happened to the part of the linear form with $h(x)$?