$\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ $\ln(t^2) = 2\ln(t)$ $\int \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$ $\frac{d(-1)^x}{dx} = i(-1)^x \pi$

Abschätzungen

Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x|+|y|$ $|x-y| \leq |x-w|+|w-y|$ $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx \leq \|f\|_{C^0}(b-a)$

Young $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$

Cauchy-Schwarz $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Bernoulliungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\forall x \geq 1, n \in \mathbb{N}$

grenzwert erfüllt $a_n(k) = a_{n+1}(k)$

Grenzwerte

Bernoulli de l'Hôpital falls $\lim \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow \lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

Wurzeln falls $\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}$, multipliziere mit $\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$

und: $\sqrt{n^2+1} = n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$

Umformen

$\lim(f) \pm \lim(g) = \lim(f \pm g)$ $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} y$

$\lim(f \cdot g) = \lim(f) \cdot \lim(g)$

bekannte Grenzwerte

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt{n} \to \infty$, $\sqrt[n]{n!} \to \infty$

$\sqrt[n]{k} \to 1$ für $k > 0$

$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{a}{f(x)}\right)^{bf(x)}\right] = \lim_{n\to 0} (1+af(x))^{\frac{b}{f(x)}} = e^{ab}$

Komplexe Zahlen

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ $\|zw\| = \|z\|\|w\|$ $\|z\|^2 = z \cdot \overline{z}$

$\varphi = \arg(z) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ $r = \|z\|$ Komplex-konjugiert erweitern oft hilfreich

Logarithmus

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ $\Rightarrow \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ $\frac{d\log(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ $\int \ln(x)\,dx = x(\log(x)-1)+C$

Eigenschaften

Kompakt: beschränkt & abgeschlossen Abgeschlossen: (Rand $+ \Omega^\circ$) $\Leftarrow [\ldots]$; $\overset{\vee}{\Omega} =]\ldots[$ ← Komplement

f ist kompakt wenn stetig Beschränkt: $\exists$ supremum & Infinimum

Inneres / "Offener Kern": $\Omega^\circ =]\ldots[$ Rand: $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ$ ↑ Abschluss

Stetig: falls lim an Stelle x_0 existiert oder falls diffbar an Stelle x_0

oder falls gleichmässig stetig Gleichm. Stetig: beschränkt, stetig & stetig ergänzbar oder Lipschitz-stetig

Maximum ≤ supremum

Lipschitzstetig: $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|$ $\forall x,y$ Stetig diffbar: Diffbar und f' stetig

Picard-Lindelöf: falls f Lipschitz-stetig, so hat $y' = f(y)$ genau eine Lösung

Fixpunktsatz: falls $L < 1$ $\exists! x_0 \in U: f(x_0) = x_0$

Supremum vs Infinimum: $\sup(-A) = -\inf(A)$ stetig & stückweise Linear & beschränkt ⇓ Lipschitzstetig

Lipschitz ⇒ Diffbar ⇒ stetig ⇒ integrierbar

nicht integrierbar ⇒ nicht stetig ⇒ nicht diffbar

Lipschitzstetig ⇒ absolut stetig ⇒ gleichmässig stetig ⇒ punktweise stetig

Punktweise "normal" stetig wenn es für Punkt für jede Umgebung des Bildpunktes eine Urbildumgebung gibt, die ganz abgebildet wird. (nicht so wichtig)

Wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt s.t. $\forall x \in D$ mit $|x-\xi| < \delta$ gilt $|f(x)-f(\xi)| < \epsilon$ ist f stetig in ξ (← umgebung)

Gleichmässig stetig wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in D: |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$

Also δ unabhängig von der Stelle x_0

Taylorreihe

$T_n f(a,b) = \sum f^{(n)}(b) \frac{(a-b)^n}{n!}$ mit $a > b$

anders formuliert $T_N(x)$ um $x_0 = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots$ // ist gleich der Fnkt falls diese eine Potenzreihe ist

Fehlerfunktion: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ Abschätzen: $R_n(x, x_0) \leq \sup_{x_0 < \xi < x} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \frac{(x-x_0)^2}{n!}$

Stuff

$e^{i\pi} = -1$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{\ln(a) \cdot b}$

Wenn lim von unten = lim von oben dann stetig.

stetig bei $x_0 \Leftrightarrow$ für jedes $V = f(x_0)$ ist $U = f^{-1}(V)$

Folgen & Reihen

Logarithmus $\ln(x+1) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1}$ Cosinus(x) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Exponentialreihe $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $e^{cx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{k!} = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \dots$

Sinus(x) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$

Tangens(x) $= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$

Arithmetische Folgen $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Arithmetische Reihe $\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd) = a_0(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2}$

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k \overset{q=1}{=} a_0(n+1) \overset{q\neq 1}{=} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \overset{q<1}{=} \frac{a_0}{1-q}$

konvergiert falls $q<1$ oder $a_0 = 0$. Keine Divergenzaussage

Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \overset{x=2}{=} \frac{\pi^2}{6} \overset{x=4}{=} \frac{\pi^4}{90}$ divergiert für $x \leq 1$, konvergiert für $x < 1$

Alternierende Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$

Kubische Reihe $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot n+1}{2}\right)^2$

Alternierende: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k}$ konvergiert

Leibnitzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ Arctan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Andere $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^2 (x-1)^k$

$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k k \overset{q=1}{=} a_0 \frac{n(n+1)}{2} \overset{q\neq 1}{=} a_0 \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$

Konvergenz einer Folge: Abschätzen
einer Reihe: Glieder müssen $\to 0$ streben und Reihe < Harmon. Reihe

Gleichmässig Konvergent $\limsup_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$ // f_k Funktion aus Funktionenfolge konvergiert gegen f
anders formuliert:
für jedes ε $\exists n$, ab welchem für alle N gilt $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$

Punktweise Konvergent wenn $\forall f_n$ $\lim f_n(x) = f(x)$
anders formuliert: $\forall x, (\varepsilon > 0)\ \exists N\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Bolzano-Weierstrass Folge beschränkt? => besitzt eine Konvergente Teilfolge
=> besitzt einen Häufungspunkt

Cauchy-Folge & Kriterium
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$ Wertunterschied wird beliebig klein
a_n ist konvergent $\Leftrightarrow$ a_n ist Cauchy-Folge $\left|\sum_{k=l}^{\infty} a_k\right| \to 0$

Leibnitzkriterium
a_n monoton fallend, gegen 0 konvergierend, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ e.g. Harmon. Reihe

Quotientenkriterium
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$: mit $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ konvergent, mit $\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ divergent

Wurzelkriterium
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$: mit $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ konvergent, mit $\liminf \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ divergent

Majoranten/Minoranten-kriterium monoton steigend/sinkend & $\exists$ grössere/kleinere die konvergiert

Konvergenzradius für Potenzreihen
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$: $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ wobei $a_n, a_{n+1} \neq 0$, lim existiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ darum ist ρ

ist $|x - x_0| < \rho$ => absolut konvergent, $> \rho$ divergent, $= \rho$ keine Aussage evt hilft Abel

Abelscher Grenzwertsatz
Sei $\sum_{n=0} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $[0,1]$ und ist als Funktion stetig auf $[0,1]$

Siehe "einige Potenzreihen" S. 15

Grenzwerte: $\lim(\sqrt{a}/b) = \lim\left(\sqrt{\frac{a}{b^2}}\right) = \sqrt{\lim\left(\frac{a}{b^2}\right)}$ limes nur auseinandernehmen wenn $\lim \sqrt{\dots} = \sqrt{\lim \dots}$ also gilt bei $\sqrt{\ }$ immer

Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte, unendliche Folge hat mindestens einen Häufungspunkt bzw. eine konvergente Teilfolge

Vektorstuff

Skalarprod $= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$ Kreuzprod $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$

Rotationsmatrizen $\begin{pmatrix}\cos & -\sin\\ \sin & \cos\end{pmatrix}$ $\underset{\text{um } z}{\begin{pmatrix}\cos & -\sin & 0\\ \sin & \cos & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$ $\underset{\text{um } y}{\begin{pmatrix}\cos & 0 & \sin\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin & 0 & \cos\end{pmatrix}}$ $\underset{\text{um } x}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos & -\sin\\ 0 & \sin & \cos\end{pmatrix}}$

Volumenelem $dx\,dy\,dz = r^2 dr \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$

Geometrie

Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $A = 4\pi r^2$

Koord: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

θ zwischen z-Achse und $\vec{r}$; φ auf x-y-Ebene von x nach Projektion von r

Ellipsoid $V = \frac{4}{3}\pi abc$ Torus(Donut) $V = 2\pi^2 a r^2$ $A = 4\pi^2 ar$

Ellipsenkoord: $x = ra\cos(\varphi)$ $y = rb\sin(\varphi)$ $r \in [0,\infty[$ $\varphi \in [0, 2\pi[$ $dx\,dy = ab\,r\,dr\,d\varphi$

Gerader Kreiskegel $V = \frac{1}{3}\pi (r^2) h$ $A = \pi r(m + r)$

Gerader Kreiskegelstumpf $V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ $A = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)m\right)$

Gleichseitiges Dreieck $A = \sqrt{3}/s$

Tetraeder $V = \frac{1}{3}Gh$ Zylinderkoordinaten: $x = r\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\varphi)$ $z = z$

$r \in [0,\infty[$ $\varphi \in [0, 2\pi[$ $\leftarrow dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$

Polarkoordinaten: $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$

$x = r\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\varphi)$

Elliptische in $\mathbb{R}^3$: $dx\,dy\,dz = abcr^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta$

$x = ra\sin(\theta)\cos(\varphi)$ $y = rb\sin(\theta)\sin(\varphi)$ $z = r\cdot c\cdot\cos(\theta)$

$dA = dx\,dy = |\text{Jacobi}|\,dr\,d\varphi = \frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{dr}$

Tangentialebene in einem Punkt

$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \Rightarrow z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

einfacher Fall: $df = 0 \Rightarrow z$ konstant bei $f(x_0, y_0) = z_0$

SinCos & Hyperbolicus

$\cos^3 - \sin^3 = -\sin^3 + \cos(x) - \sin^2\cos = \cos^3 + \sin\cos^2 - \sin$

$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ $\cot = \frac{1}{\tan} = \frac{\cos}{\sin}$ $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = -\cos(x)$

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i\sin(ix)$ $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} = \frac{1}{\coth}$

$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ $\cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$ $\sqrt{1 - x^2} = \cos(\sin^{-1}(x))$

$\arccos(1/2) = \frac{\pi}{6}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

$\tan(x \pm y) = (\tan(x) \pm \tan(y)) / (1 \mp \tan(x)\tan(y))$

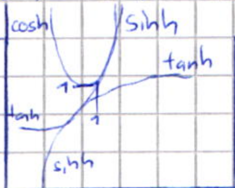
$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

$\sin^2 + \cos^2 = 1 = \sinh^2 + \cosh^2$ $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\operatorname{artanh}(x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)\cdot\frac{1}{2}$

	0	30°/$\frac{\pi}{6}$	45°/$\frac{\pi}{4}$	60°/$\frac{\pi}{3}$	90°/$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



Kettenregel $(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

Produktregel $(u\cdot v)' = u'v + v'u$

Quotienten $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Differentiale

Umkehrsatz $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $df^{-1}(f(x)) = \frac{1}{df(x)}$ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ Ausführlicher auf Seite 7

Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$, gilt für n Variablen

HesseMatrix $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{pmatrix}$ JacobiMatrix "Funktionalmatrix" $d\vec{f} = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z}\\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z}\end{pmatrix}$

Rotation in 2D $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \frac{dv_2}{dx} - \frac{dv_1}{dy}$ in 3D $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dv_3}{dy} - \frac{dv_2}{dz}\\ \frac{dv_1}{dz} - \frac{dv_3}{dx}\\ \frac{dv_2}{dx} - \frac{dv_1}{dy}\end{pmatrix}$

Potentialfeld von $\vec{v}$: $\nabla f = \vec{v}$ Laplace-Operator $\Delta f = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Gradient $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)^T$

Poincaré: F ist konservativ $\Leftrightarrow$ rot = 0 $\Rightarrow \exists$ ein Potential f

Divergenz eines Vektorfeldes: $\operatorname{div}(\vec{v}(x,y,z)) = \nabla\vec{v} = v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}$

Identitäten:

$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = 0$ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)\times\operatorname{grad}(g)) = 0$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v})) - \Delta A$

Schwierig Integrierbar

Partialbruchzerlegung? Substitution? Part. Integration? $u'(v)\cdot v'$ anwendbar in reverse?

$\frac{U(x)}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(1 + x^2)}$

Partielle Integration

$\int u v' = uv - \int u' v$

↳ LIATE

Manchmal hilft mehrmals anwenden und dann als normale Gleichung umformen

Substitution

$\int_a^b u'(v) v' \, dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(z) \, dz$, wobei $z = v(x)$

$\frac{df}{dx} = f' \Rightarrow \frac{df}{f'} = dx$

Fubini

$\int_a^b \int_c^d f \, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f \, dy\, dx$

Wegintegral

$\int_\gamma \vec{f} = \int_0^1 \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma' \, dt$

Wegintegral entlang Kurve γ

Gesucht: $\int_\gamma v \, ds$ ← Vektorfeld

Gegeben: $v(x,y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$

$\gamma : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

Option 1:

$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} dv_2/dx \\ dv_1/dy \end{pmatrix} = (2x + 2y - (2x + 2y)) = 0$

$\Rightarrow$ Konservatives $\vec{v} \Rightarrow$ Wegintegral Wegunabhängig

$\Rightarrow \exists$ Potential f, also $\nabla f = v$

$\frac{df}{dx} = 2xy + y^2 \Rightarrow f = x^2 y + xy^2 + g(y)$

$x^2 + 2xy = \frac{df}{dy} = x^2 + 2xy + g'(y)$

$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = 0 + C$

wähle $C = 0$

$\Rightarrow f = x^2 y + xy^2$

$\int_\gamma \vec{v} = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = \underline{\underline{0}}$

Option 2: Direkt berechnen (schwieriger)

$\int_\gamma v \, ds = \int_0^\pi v(\underbrace{\cos(t), \sin(t)}_{\gamma(t)}) \cdot \underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\gamma'(t)}$

$= \int_0^\pi -(2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t))\sin(t) + (\cos^2(t) + 2\sin(t)\cos(t)) \cdot \cos(t) \, dt$

$= \int_0^\pi -2\sin^2 t \cos t - \sin^3 t + 2\sin t \cos^2 t \, dt$

$= \int_0^\pi -\sin^3 t + 2\sin t \cos^2 t \, dt$

$= -\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$

Extrema auf Gebiet — Maximiere $f(x,y)$

1. Extremakandidaten im Gebiet: df berechnen, gleich 0 setzen
   Wenn keine Kandidaten (im Gebiet) muss Extrema am Rand sein, sonst kann es.
2. Randkandidaten: prüfe $df = 0$ auf Rand um offenes Ω: $f(a,b)$ bestimmen, dann erst ableiten! (param. rand)
3. Eckpunkte sind auch Kandidaten

Krit. Punkte: 1 dim: $df = 0$; n dim: $df(x_0)$ nicht vollen Rang

Prüfe ob Min, Max oder Sattelpunkte:

a) Vergleich mit anderen Punkten. Wenn $f(x_0) > f(x_1)$, ist x_1 kein globales Max in Ω

b) lokales Max? 1. $\operatorname{Hesse}(f)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2 f}{dx_n dx_1} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_n^2} \end{pmatrix}$

positiv definit $x^T H x > 0$ $\forall x \Rightarrow$ Min

$< 0 \Rightarrow$ Max

$= 0 \Rightarrow$ Keine Aussage

$> = < \Rightarrow$ Sattelpunkt

Eigenwertkriterium

Alle EW $> 0 \Rightarrow$ pos (⇒ Min), $< 0 \Rightarrow$ neg def. (⇒ Max), $\leq$ oder $\geq \Rightarrow$ keine Aussage

pos & neg $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ sattelp.

Mit Nebenbedingung

1. Hesse $= \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ — mehrere g siehe *

$n = \# g$ = Anzahl Nebenbedingungen

2. mit Hurwitz aber nur $k > 2n$ erste Hauptminoren ansehen → in $\mathbb{R}_3$ nur $\det|H|$ > 0 max < 0 min, $= 0$ keine Aussage

Hurwitzkriterium

Hauptminoren $A_1 = \det(a_{11})$ $A_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $A_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

usw bis A_n.

Alle $A_i > 0 \Rightarrow$ positiv definit

$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0 \ldots \Rightarrow$ negativ definit

weder noch $\Rightarrow$ indefinit

---

* Mehrere g: $\begin{matrix} 0 & 0 & g & g \\ 0 & 0 & h & h \\ g & h & & \\ g & h & & H \end{matrix}$ det 0 keine Aussage; $\Rightarrow$ det negativ $\Rightarrow$ Max; det positiv $\Rightarrow$ Min

wenn $g(x_1, \ldots, x_n)$ dann nach jeder 2x ableiten

Ableitungen spez. Funktionen

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $(\log_a(x))' = \log_a(e)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$

$|x|' = \frac{x}{|x|}$ $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{sgn}(x))' = |x|$ $(e^{cx})' = ce^{cx}$ $(a^x)' = (e^{\ln(a^x)})' = (e^{\ln(a)x})' = a^x \cdot \ln(a)$

$(x^x)' = (e^{x\ln(x)})' = x^x \cdot (x\ln(x))' = x^x\left(\ln(x) + \frac{1}{x}x\right) = x^x(\ln(x)+1)$

$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$ $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}$

$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\tanh' &= 1-\tanh^2\\ \cosh' &= \sinh\\ \sinh' &= \cosh\end{aligned}}$$

$\operatorname{arcsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\operatorname{arccosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\operatorname{arctanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Spezielle bestimmte Integrale

$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \pi & m=n\neq 0\end{cases}$ $\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx) = 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ $a>0$ $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a>0$

$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$, $a>0$

$\int \ln(x)dx = (\ln(x)-1)x$

Spezielle unbestimmte Integrale (immer $+C$)

$\int (x+c)^3 dx = \frac{1}{4}(x+c)^4$

$\int x^s dx = \frac{1}{s+1}x^{s+1}$ $\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1}$, $s\neq 1$

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$ $\int (ax^p+b)^s x^{p-1}dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)}$, $s\neq 1, a\neq 0, p\neq 0$

$\int \frac{x^{p-1}}{ax^p+b}dx = \frac{1}{ap}\ln(ax^p+b)$, $a,p\neq 0$ $\int\frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln(cx+d)$

$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{a}{2}\ln(x^2+cd+d) + \frac{b-\frac{ac}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{c}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\right)$, $c^2-4d<0$

$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{|a|}$ $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right)$ $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$\int a^{kx}dx = \frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$ $\int x^x dx$ = Don't even try

$\int e^{ax}p(x)dx = e^{ax}\left(a^{-1}p(x) - a^{-2}p'(x) + a^{-3}p''(x) - \ldots + (-1)^n a^{-n-1}p^{(n)}(x)\right)$, $a\neq 0$, p = Polynom n-ten Grades

$\int e^{kx}\cos(ax+b) = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\sin(ax+b) - a\cos(ax+b))$ $\int\ln(x)dx = x(\ln(x)-1)$

$\int e^{kx}\sin(ax+b) = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\cos(ax+b)+a\sin(ax+b))$ $\int\ln(x)\cdot x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln(x)-\frac{1}{k+1}\right)$ $k\neq -1$

$\int\log_a(x)dx = x(\log_a(x)+\log_a(e))$ $\int x^{-1}\ln(x)dx = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

Spezielle Integrale continued $+C$

$\int \cos^2(\varphi) = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ $\qquad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

$\int \tan(x)\,dx = -\ln(\cos(x))$ $\qquad \int \sin^2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$ $\qquad \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$

$\int \tan(x)^2\,dx = \tan(x) - x$ $\qquad \int \frac{1}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ $\qquad \int \frac{1}{\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

$\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \ln|\sin(x)|$ $\qquad \int \sin(x)^n\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx,\ n \geq 2$

$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx,\ n \geq 2$

$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \int \operatorname{arcsinh}(x) = -\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arcsinh}(x)\cdot x$

$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \int \operatorname{arcosh}(x)\,dx = \operatorname{arcosh}(x)\cdot x - \sqrt{x^2-1}$

$\int \arctan(x)\,dx = x\arcsin(x) - \ln(1+x^2)$ $\qquad \int \operatorname{artanh}(x)\,dx = x\operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

$\int \sinh = \cosh$ $\qquad \int \cosh = \sinh$ $\qquad \int \tanh = \ln(\cosh(x))$

Sin/Cos ^{3}

$\sin^3 = (1-\cos^2)\sin = \sin - \sin\cdot\cos^2$

$\cos^3 = \cos - \sin^2\cos$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$$\int \sin^3\,dt = \int \sin - \sin\cdot\cos^2\,dt = \underset{\substack{u=\cos(t)\\ du=-\sin(t)}}{\text{Substitution}} = \int \sin\,dt + \int u^2\,du$$

$$= -\cos(t) + \frac{1}{3}u^3 = -\cos(t) + \frac{\cos^3(t)}{3}$$

$\tan(90^\circ - t) = \frac{1}{\tan(t)}$

$\int 3\sin^2\cos\,dt = \sin^3(t)$

Recap: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
Aber hier ist $\Delta x = |x - x_0|$

Taylor mit mehreren Variablen

$$T(f(x,y))(x_0,y_0) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{T_0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(\Delta x\Delta y)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\right) + \frac{1}{3!}\left(\partial^3 f \text{ in alle richtungen mal jeweilige } \Delta x, \Delta y\right) + \frac{1}{4!}\cdots$$

anders notiert: $f(x_1 \ldots x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_1 \ldots x_n)$

Rest: $r_1 = \begin{matrix} T_2(x_s,y_s) \\ -T_1(x_s,y_s)\end{matrix} = \begin{matrix} T_2(x_0 + s(x-x_0), y_0 + s(y-y_0)) \text{ für } s\in[0,1] \\ -T_1(x_s,y_s)\end{matrix}$

$$= r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_s,y_s)(y-y_0)^2\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_s,y_s)(x-x_0)(y-y_0)\right)$$

Harmonische Funktionen

siehe Recap oben. Wenn $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$, dann "harmonisch"

Umkehrsatz (⚠ immer nur lokale Aussage) // folgt aus Mittelwertsatz (S14)

Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar mit $f' > 0$ auf $]a,b[$
und sei f auf $]a,b[$ beschränkt $-\infty \leq c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \leq \infty$
Dann ist $f:]a,b[\to]c,d[$ bijektiv
und die Umkehrfunktion $f^{-1}:]c,d[\to \mathbb{R}$ ist diffbar mit

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \text{ in }]a,b[$$

bzw

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Sei $f \in C^1$ aka 1x ableitbar und sei $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar an einer Stelle x_0, dann existieren Umgebungen U von x_0, V von $f(x_0) = y_0$ und eine Inverse Funktion g sodass $g(f(x)) = x$ und $dg(f(x)) = (df(x))^{-1}$

g ist auch $\in C^1$.

Wenn $\det|df(x_0)| \neq 0$ ist f lokal umkehrbar, d.h. $\exists$ offene Umgebungen U, V s.d. f eingeschränkt auf $U \to V$ bijektiv ist. Dann gilt $d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1}$

Zeige dass der Graph von $F(x,y) =$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist
1. Zeige $dF \neq 0 \; \forall x,y \Rightarrow$ Aus Satz über implizite Funktionen (S8) folgt, dass die Lösungsmenge von $F = 0$ in einer Umgebung jeder geg. Lösung der Graph einer Funktion ist. $(y = y(x))$ 2. Zeige 1 Bsp ~~des~~ Lösungsmenge $\neq \{\}$

Diffeomorphismus: f injektiv und $f^{-1} \in C^1$, also genau wenn $\det(df(x_0)) \neq 0$
Diffeomorphismus nur global falls f global bijektiv

Beweise globaler Diffeomorphismus
1. f diffbar, df berechnen, $\det(df) \neq 0 \; \forall x \in U$ => lokaler Diffeomorphismus laut Umkehrsatz
2. f bijektiv auf V

Option b) Inverse f^{-1} berechnen. Zeigen dass f und $f^{-1} \in C^1$

Störung: eine weitere Anwendung d. Umkehrsatzes
Gegeben die Lösung x_0 eines Gleichungssystems f, mit $f(x_0) = \vec{y}$
Falls $\det|df(x_0, y_0)| \neq 0$ ist df (= Jacobimatrix Seite 3) invertierbar.
Also 1. Gleichungssystem gegeben $\begin{matrix} f_a = y_1 \\ f_b = y_2 \end{matrix} \Rightarrow f(x,y) = \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \end{pmatrix}$
2. $df = \begin{pmatrix} \frac{df_a}{dx} & \frac{df_a}{dy} \\ \frac{df_b}{dx} & \frac{df_b}{dy} \end{pmatrix}$ 3. zeige $\det|df|(x = x_0, y = y_0) = 0$

3. Es folgt dass Umgebungen existieren um (y_1, y_2) in V und um die gegebene Lösung $(x_0, y_0) = (\ldots, \ldots)$ in U // $U \to V$
sodass f invertierbar mit stetigem f^{-1}

4. Umgebung in V = ein kleiner Ball um gegebene Lösung mit radius $\varepsilon > 0$ sodass Ball $B \subset V$. Dann sind alle $(y_1 + \xi, y_2 + \eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2$ Elemente von V.
Störung
Ferner ist $(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ eine Lösung des gestörten Gleichungssystems $\begin{matrix} f_a = y_1 + \xi \\ f_b = y_2 + \eta \end{matrix}$. Stetigkeit von f^{-1} bedeutet, dass (ξ und η) (x und y) stetig beeinflussen.

Implizite Funktionen, reguläre Punkte

aka voller Rang

z.B. Kreisgleichung $f(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n) = 0$, y abhängig von x

(Rang $(df(x_0)) = \min(n, \ell)$ wenn $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$

weiter gilt: $n \geq \ell \Rightarrow df(x_0)$ ist surjektiv

$n \leq \ell \Rightarrow df(x_0)$ ist injektiv

$n = \ell \Rightarrow$ bijektiv

Satz

$\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ stetig.

Falls Punkt $x_0 = (a, b) \in \Omega$ regulär (a = erste k Einträge, b = letzte ℓ Einträge) mit $f(x_0) = 0$ und $\det(d_y f(x_0)) \neq 0$ (d.h. $d_y f(x_0)$ ist invertierbar)

wobei $d_y f(x_0)$ die Untermatrix von $df(x_0)$ ist, die die partiellen Ableitungen nach y bzw b enthält

Dann lässt sich das Gleichungssystem $f(x,y)$ bzw $f(a,b) = 0$ nach den Koordinaten y bzw b so auflösen, dass sie von x bzw a abhängig sind: Es gibt ein offenes U und V um a und b (sodass U in $\mathbb{R}^k$ und V in $\mathbb{R}^\ell$) sodass $f(x, h(x)) = 0$

Weiter kann die Ableitung durch berechnet werden

$$dh(x) = -(d_y f(x, h(x)))^{-1} \cdot d_x f(x, h(x))$$

Bsp: Zeige dass $2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$ eine Funktion $\Phi(x) = y$ mit $\Phi(1) = 1$ implizit definiert

1. $(1,1)$ löst gleichung
2. ist regulärer Punkt
3. $d_y f = -4x + 2y + 4 \Rightarrow d_y f(1,1) = 2 \neq 0$

Es folgt die Existenz einer Umgebung U um $x_0 = 1$ und einer Funktion $\Phi \in C^1(U \to \mathbb{R})$ mit $\underset{x_0}{\Phi(1)} = \underset{y_0}{1}$ sodass $f(x, \Phi(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.

Wenn explizit gefragt kann Φ auch durch nach y auflösen von $f(x) = 0$ bestimmt werden

Newtonverfahren

Nullstelle annähern aka iterativ finden wenn man ungefähr weiss wo sie ist.

Vorgehen: tangente legen an x_0 = Nullstelle. Nst der Tangente $\Rightarrow x_1$

mit x_1 wieder eine Tangente an f legen bis genau genug (sich wenig ändert)

Wir wählen einen startpunkt $x_k \Rightarrow f(x_k) \approx f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

Die Nst davon gibt den nächsten Startpunkt. d.h. $y(x_{k+1}) = 0$

Umformen ergibt $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

⚠ Konvergiert aber nicht immer! evt gar nicht

Bspw. bei schlechtem startpunkt gegen andere Nst konvergieren

modifiziertes Newton-Verfahren $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$

ist langsamere annäherung, dafür muss f' nur ein Mal ausgewertet werden

FunFact zu Extrema: ist das gebiet abgeschlossen & beschränkt $\Rightarrow$ kompakt, nimmt f darauf ein Min- und Maximum an

~~($\Rightarrow$ Rand muss nicht geprüft werden ?)~~

*Richtung d. Parametrisierung irrelevant

Extrema mit Nebenbedingungen

Gesucht: Extremum von f sodass $g=0$

1. Parametrisiere $\Rightarrow \gamma(t)$ (Rand)*
2. Setze Parametrisierung in f ein $\Rightarrow \Phi(t) = f(\gamma(t))$
3. Bedingung für ein Extremum ist $\Phi(t)' = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t) = 0$
4. Prüfe Anfangs- und Endpunkte d. Parametrisierung separat durch einsetzen

Für schwierige Ränder: einfach Einzelteile nehmen, Eckpunkte überprüfen

"Kritischer Punkt"

1 dim: $df = 0$

n dim: df nicht vollen Rang

$\Rightarrow$ nicht Invertierbar

gegenteil von regulär

Lagrangemultiplikatoren für Extrema mit Nebenbedingungen

Satz: Sei p_0 lokales Maximum von f unter Bedingung $g=0$ und sei p_0 ein regulärer Punkt (s. 8) von g

Dann existiert $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ so, dass für $L = f + \lambda g$ gilt

$dL(p_0) = df(p_0) + \lambda\, dg(p_0) = 0$

Die nichtregulären Punkte von g müssen separat geprüft werden

Vorgehen: 0. $df = 0$?

1. finde nicht-reguläre Punkte von g
2. bestimme $L = f + \lambda g$
3. bestimme krit. Punkte von L d.h. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}$

   Nach λ gibt ein wieder $g=0$
4. (3) ergibt $n+\ell$ Gleichungen für ebensoviele Unbekannte
5. Alle gefundenen Punkte auf Max-/Minimum überprüfen.

5. a) für lokale Extrema Hessematrix von L aufstellen (S. 4)*

5. b) für globale Extrema f berechnen und vergleichen

* auf S4 "Mit Nebenbedingung" beachten

Bsp mit Lagrange

geg: $f(x,y) = x + 2y$

Bedingung $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$dg = (2x, 2y) \stackrel{!}{=} (0,0) \Rightarrow x=0, y=0$

Einsetzen $\Rightarrow$ liegt nicht auf $g=0$

$\Rightarrow (0,0)$ ignorieren

$$L = \underbrace{x + 2y}_{f} + \lambda \underbrace{(x^2 + y^2 - 1)}_{g}$$

$$\frac{dL}{dx} = 1 + 2x\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 2 + 2y\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{y}$$

$\frac{dL}{dx}$ und $\frac{dL}{dy}$ müssen $=0$ sein $\Rightarrow$ x und y können nicht 0 sein $\Rightarrow$ wir dürfen durch x und y teilen

$\Rightarrow 2x = y \Rightarrow x^2 + (2x)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

// $df=0$ ist nicht in $g=0$, deshalb egal

Selbes Bsp mit Parametrisieren

$f(x,y) = x + 2y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = \cos(t) + 2\sin(t)$

$\varphi'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t) = 0$

$\boxed{\text{Weil } \gamma(t) = \begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi[}$

$\Rightarrow 2\cos(t) = \sin(t)$

$4\cos^2(t) = \sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$

$5\cos^2 = 1 \Rightarrow \cos(t) = x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

// $df \neq 0$ in $g=0$ deshalb egal

Allg. Vorgehen

1. berechne $df(x) = 0$ // oder df nicht vollen rang in mehrdimensional

   prüfe ob diese krit. Punkte in Fläche liegen. Ja $\rightarrow$ Kandidaten
2. Kritische Punkte von g erfüllen $g=0$? Dann können sie auch Lsg sein
3. Rand parametrisieren oder krit. Punkte auf Rand mit Lagrange bestimmen
4. Eckpunkte prüfen weil die evt Max/Min sind und Steigung trotzdem nicht 0

Wurzel Minimieren $\sqrt{a}$

stattdessen nur a minimieren.

Mehrere $g(x) = 0$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \Rightarrow dg = \begin{pmatrix} dg_1 \\ dg_2 \\ dg_3 \end{pmatrix} \Rightarrow dL = df + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} dg$$

Über Quader integrieren (Fubini)

$$\int_Q f(x)\,d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2)\,dx_n \dots dx_2\,dx_1$$ //reihenfolge noch frei wählbar

$\int_Q d\mu$ = Der sog. "Elementarinhalt" $= \prod_{j=1}^{n} |\text{Intervall}_j|$

Normalbereiche

Fubini nicht anwendbar bei $\int^{\infty}$

x-Normalbereich: $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$

y-Normalbereich: vertausche x und y

Integration über Normalbereich

Gegeben: $\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge y^2,\ y\ge x^2\}$ Skizze kann hilfreich sein

1. Als normalbereich Darstellen, egal ob nach x oder y
   $\Rightarrow$ x-Normalbereich $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \sqrt{x}\le y\le x^2\}$
   (x-)Schnittpunkte von den beiden Schranken; gegeben nach y aufgelöst
2. $\int_{\Omega_1} h(x,y)\,d\mu = \int_a^b\int_{\sqrt{x}}^{x^2} h(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[H_y(x,y)\right]_{\sqrt{x}}^{x^2} dx$

Satz von Green

$$\int_Q \operatorname{rot}(\vec{v})\,d\mu = \int_{\partial Q} \vec{v}\,d\vec{s}$$

$$\int_Q \nabla\times\vec{v}\ (S.3)\ d\mu = \int_Q \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ein stetig diff.bares Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ und Q ein beschränkter Bereich auf Ω mit ∂Q = Rand von Q

Wegintegral von Rand von $\vec{v}\,ds$ = Gebietsintegral von $\operatorname{rot}(\vec{v})\,d\mu$

Recap (S.4) $\int_{\partial Q}\vec{v} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$ (skalarprod.) wobei $\gamma(t)$ = Rand in math. positiver Richtung Parametrisiert

Flächeninhalt von komplizierten Flächen

1. Parametrisiere Rand
2. Berechne γ'
3. $\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\,ds$ [mit $\vec{v}$ so dass $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 1$]

$\Rightarrow$ Vorschläge für so ein $\vec{v}$: $(0,x)$, $(-y,0)$, $\frac{1}{2}(-y,x)$

Reihenfolge & Grenzen vertauschen

1. Graph zeichnen!
2. Schnittpunkte d. Grenzen bestimmen
3. Grenze nach x auflösen $\Rightarrow$ neue grenze (jeweils von Schnittp. zu Schnittp.)
4. $dx\,dy \Rightarrow dy\,dx$

Integrale von 1-Formen

$\int_{\partial A} \underbrace{(x^2\,dx + y^2\,dy)}_{\lambda}$

Option 1: Mit $\int_{\gamma_1} = (\lambda(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t))\,dt$. Gebiet Skizzieren, Rand in γ unterteilen und parametrisieren, alle $\int_{\gamma}$ addieren.

Option 2: Mit Green folgt $\int_{\partial A}\lambda = \int_A \nabla\times\vec{v}\,d\mu$

$= \int_A \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) dx\,dy$

$\Rightarrow = 0$ in diesem Bsp

Beachten beim parametrisieren

$\gamma(t)\mapsto(x,y)$ damit $v(\gamma)$ funktioniert mit $v(x,y)$

Bsp. mit polar koord: $x = r\cos$, $y = r\sin$ einsetzen in f $\Rightarrow \gamma_1(\varphi)\mapsto(r(\varphi),\varphi)$

$\gamma_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi)\end{pmatrix} \Rightarrow \gamma(\varphi) = \gamma_2(\gamma_1(\varphi))$

$\gamma_2(r,\varphi)\mapsto \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \Rightarrow \gamma(\varphi)\mapsto \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \Rightarrow v(\gamma(\varphi))$ funktioniert

$\Rightarrow \gamma'$ berechnen; $\int v(\gamma)\cdot\gamma'\,dt$

Riemannintegrabel

(stetig implies) ~~notig~~ lim Obersumme = lim Untersumme
(diffbar)

Riemannintegrabel => Substitution möglich as follows

Substitution

Sei f Riemannintegrabel auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Koordinatentransformation Φ ist ein C^1 Diffeomorphismus und gegeben durch

$$(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(u_1, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} g_1(u_1, \ldots, u_n) \\ \ldots \\ g_n(u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}$$

Sei $\tilde{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$ das Bild des Gebiets Ω // $\Phi : \tilde{\Omega} \mapsto \Omega$

Die Substitutionsregel lautet

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\tilde{\Omega}} f(g_1(u), \ldots, g_n(u))\, |\det d\Phi|\, du_1 du_2 \ldots du_n$$

$$\text{Mit } d\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

// Das ist oft nicht für einfaches Integrieren
// sondern für einfacheres Parametrisieren =>
// Spiegelsymmetrie u.ä., Kugelsymmetrie

Falls zum Fläche in zu bestimmen: $a(x) \leq r \leq b(x)$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{a(x)}^{b(x)} 1 \cdot r \, dr\, d\varphi$$ // polar in // dem Bsp

Siehe S. 10 "Normalber."

Bsp: Kartesisch -> Polar

$$f(x,y) \Rightarrow f_2(r,\varphi) = f(\overbrace{g_1(r,\varphi)}^{x}, \overbrace{g_2(r,\varphi)}^{y})$$

// g_1, g_2 transformieren Polar zu Kartesisch

$$g_1(r,\varphi) = \overbrace{r \cdot \cos(\varphi)}^{x} \qquad g_2(r,\varphi) = \overbrace{r \cdot \sin(\varphi)}^{y}$$

$$\begin{array}{l} dg_1 = (\overset{\text{nach } r}{\cos(\varphi)}, \overset{\text{nach } \varphi}{-r\sin(\varphi)}) \\ dg_2 = (\sin(\varphi), r\cos(\varphi)) \end{array} \Rightarrow \det d\Phi = \left|\begin{matrix} dg_1 \\ dg_2 \end{matrix}\right| = r\cos^2 + r\sin^2 = \underline{\underline{r}}$$

$$\Rightarrow \int f(x,y)\, dx\, dy = \int f(g_1(r,\varphi), g_2(r,\varphi)) \cdot |r| \cdot dr\, d\varphi$$

$$= \int f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot |r| \cdot dr\, d\varphi$$

Polar: $dx\,dy \Rightarrow r\,dr\,d\varphi$
Elliptisch: $ab\,r\,dr\,d\varphi$
Zylinder: $r\,dr\,d\varphi\,dz$
Kugel: $r^2\, dr \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$
mehr infos S. 3 "Geometrie"

r θ auf deckel
$r = \frac{z+a}{2}$ o.ä.

Oberflächeninhalt

Ist 2-Dimensional in $\mathbb{R}^3$
Bsp Kugeloberfläche: r fix, φ und θ nicht fix

$$\Rightarrow \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_u := \frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

Wenn $\Phi(u,v)$ = Oberfläche S, => Normalenvektor auf Oberfläche

$$\vec{n} = \pm \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$$

dann $\partial\sigma = |\Phi_u \times \Phi_v|\, du\, dv$
$= (\det d\Phi)\, du\, dv$

und $\int_S 1\, d\sigma$ = Flächeninhalt $\mu(S)$

$$= \int |\Phi_u \times \Phi_v|\, du\, dv$$

Oberfläche der Fläche vom Graph $f(x,y)$

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix}, \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\Phi_x \times \Phi_y| = \left|\begin{pmatrix} -f_x' \\ -f_y' \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Rightarrow \overset{\text{Oberflächenelement}}{\partial\sigma} = |\Phi_x \times \Phi_y|\, \partial x\, \partial y = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

// es hat immer noch Platz zum das aber einer Funktion g auswerten

$$\int g(x,y) \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

Flussintegral

Oberfläche S Parametrisiert durch $\Phi(B)$; Vektorfeld $\vec{v}$; $B = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ \dots \end{pmatrix}$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_B \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} |\Phi_u \times \Phi_v| \cdot v \, du\,dv = \int_B \vec{v}(\Phi) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \, du\,dv$$

ignorieren? nein!

Flussintegral

Fluss ist zerlegbar: Fluss(Zylinder) = Fluss(Mantel) + Fluss(Boden) + Fluss(Decke)

Richtung von $\vec{n}$ = Richtung des Flusses

Satz von Gauss

Zusammenhang (Flussintegral über Oberfläche) und divergenz($\vec{v}$)

$\mathrm{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dv_i}{dx_i}$ = Zahl // Phys: Quellstärke von $\vec{v}$ abhängig von Ladungsdichte

Satz: beschränktes V mit $\partial V \in C^1$
$\vec{v}$ auf V ganz definiert und stetig diffbar
Dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{v}\vec{n} \, d\sigma = \int_V \mathrm{div}(\vec{v}) \, d\mu}$$

ignorieren? nein

wobei $\vec{n}$ nach aussen zeigt

Gilt auch für höhere Dimensionen: $\iiint_{Kegel} \mathrm{div}(F)\, dV = \iint_{Kegelmantel+Deckel} \vec{F}\, d\vec{S}$

⚠ wenn $\mathrm{div}(\vec{v})$ nur von z abhängig $\Rightarrow = \int_{z_a}^{z_b} \mathrm{div}(\vec{v})\, dz$

$$\iiint_{Volumen} \mathrm{div}(\vec{v})\, d^{(n)}V = \oint_{S=\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot d^{(n-1)}\vec{S}$$

Stokes

$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$ // Phys: Wirbelstärke

Satz: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ stetig diffbar auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $C \subset \Omega$ eine offene Fläche durch die geschlossene C^1 Kurve $\gamma = \partial C$ beschränkt.
Dann gilt

$$\boxed{\int_{\gamma = \partial C} \vec{v}\, d\vec{s} = \int_C \mathrm{rot}(\vec{v})\vec{n}\, d\sigma} \qquad \vec{n} = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$$

γ läuft in math positiver Richtung

Volumen

z.B. Schnittmenge zweier Zylinder
Bedingungen als Normalbereich notieren $\Rightarrow \iiint$
Abhängiger weiter innen (S. 10)

Linienintegral Optionen

Aufgabe: Berechne ⌐↓ integral mit vektorfeld $\vec{v}$
Option 1: ist $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$? Dann Wegunabhängig und Lsg $= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$
wobei f Potential von V ist, also $\nabla f = v$
Vorgehen: $f_x = V_x \Rightarrow f = \dots + g(y) \Rightarrow f_y = \dots + g'(y) = v_y \Rightarrow g(y) = \dots \Rightarrow f = ?$
Option 2: Green (S. 10)
Option 3: Zusammensetzen aus Wegintegralen (S. 11)

⚠ Richtung umkehren wenn so ↻ statt so ↺ ist

Anmerkung Gauss

Aus $\iiint_{Volumen} \mathrm{div}(\vec{v})\, dV = \oint_{\partial V} \vec{v}\vec{n}\, d\vec{s}$ folgt dass Integral über Volumen von $\mathrm{div}\,\vec{v}$ = Summe aller Integrale über Flächen von $\vec{v}$ = Fluss

DGL

Explizit: Maximalableitung = Rest
Gewöhnlich: Fnkt einer Variable <↯> partiell
Lineare...
inhomogene: x steht einzeln
mit konst koeffizienten: inhomogener Teil erlaubt

Normalform: $y' + u'(x)y = v(x)$ — 1. Ordnung

$$y = \underbrace{Ce^{-u(x)}}_{\text{allg. Lsg.}} + \underbrace{\int v(x)e^{u(x)}\,dx \cdot e^{-u(x)}}_{\text{spez. Lösung}} \quad \text{allg Lsg}$$

↑ homogenproblem

mit Konstanten Koeffizienten — 2. Ordnung
$k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x) = 0$

Wronskideterminante $= f(x) \cdot g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0 \Rightarrow f$ und g lin. unabhängig

homogener Ansatz: $y = e^{\lambda x}$ $y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
einsetzen $\to \lambda_{1,2} \to y_{1,2}$ // mehrfache Nst ist i.O. $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Wenn y_1, y_2 lin unabhängig voneinander $\to$ Fundamentalsystem $\to y = ? \to$ AWP

Wenn nicht: ↯ $\to$ Variation d. Konstanten: $y = C(x) \cdot e^{2x}$
$y' = 2C(x)e^{2x} + C'(x)e^{2x}$ $y'' = C''(x)e^{2x} + 4C'(x)e^{2x} + 4C(x)e^{2x}$

einsetzen $\to$ durch $e^{\lambda x}$ $\to$ nach $C(x)$ auflösen

// Mathematiqua: Wenn $y' + b(x)y = a(x) \Rightarrow y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ — y_1: homogene Lsg

$y_2(x) =$ spez. Lsg aber partikulär mit $C(x) = \int v(x)e^{u(x)}$
C einsetzen => AWP

$\frac{y'}{y}$ Separation d. Variablen
Wenn $y' = b(x) \cdot y$ dann $\int \frac{1}{y}\,dy = \int b(x)\,dx$

2. Ansatz laut Franz: $C'(x) = \frac{\text{inhomogener Teil}}{y_h}$

Komplexes Fundamentalsystem $y_{1,2} = e^{(2\pm 3i)x}$

$$e^{2x} \cdot e^{i(-3x)} = e^{2x}(\cos(-3x) + i\sin(-3x)) = e^{2x}(\cos(3x) - i\sin(3x))$$

$y_a = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \cos(3x) \cdot e^{2x}$ nicht vergessen
$\Rightarrow$ Wenn y_a und y_b lin unabhängig => $y = ?$ => AWP
$y_b = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\frac{1}{i} = \sin(3x) \cdot e^{2x}$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$

Inhomogene Lineare DGL zweiter Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$y = \underbrace{y_1 \cdot C_1 + C_2 y_2}_{\text{allg}} + \underbrace{Y}_{\text{partikulär}}$$

wenn bei $y'' + py' + qy = g(x)$ $g = e^{cx}$
$Y = Ae^{cx} \to$ Ableiten, einsetzen $\to Y = ?$

wenn $g = \sin/\cos$ funktion $Y = A(\sin(x)) + B\cos(x) \to$ einsetzen
// wenn c die charakteristische konst, multipliziere Ansatz mit x => $e^{xc} \cdot x \cdot k$

wenn g Potenzfunktion $4x^2 \to p = 2$
$Y = Ax^p + Bx^{p-1} + C$

wenn c die charakteristische Gleichung q Mal löst
$\Rightarrow Y = Ax^q e^{cx}$

wenn nicht $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$
sondern $y'' - 3y' = 4x^2$
$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

Picard-Iteration

$f(x,y) = y' \overset{Bsp}{=} \cos(x) + \cos(x) \cdot y$ Anfangswerte: $y(0) = 1$, $y(x_0) = y_0$

Wenn Lipschitzstetig dann existiert eine eindeutige Lösung und Iteration ist anwendbar

$$y_0 = y(0) \overset{Bsp}{=} 1$$

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(t, y_0)\,dt \overset{Bsp}{=} 1 + \int_0^x \cos(t) + \cos(t) \cdot 1 \; dt = \left[2\sin(t)\right]_0^x$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(t, y_1)\,dt$$

Recap Lipschitzstetig: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, $L \geq 0$

Ellipsen & andere Kegelschnitte (AM)

Kreis: $(a+x)^2 + (b+y^2) = r^2$ $M = (-a,-b)$

Tangente: $a, b = 0 \Rightarrow t: x_0 x + y_0 y = r^2$ $P(x_0, y_0)$ = Berührungspunkt

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a^2 + b^2 = c^2$

Punkt auf Ellipse: $x(P) = a \cdot \cos(\alpha)$
$y(P) = b \cdot \sin(\alpha)$

Steigung bei $x_0, y_0 = -\frac{b^2 x_0}{y_0 a^2}$

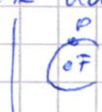
$t: \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$

$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a = \text{konst}$

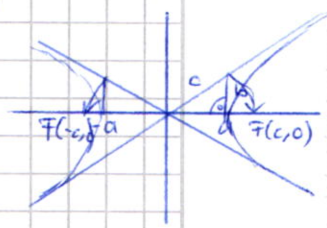
Parabel: $y^2 = 2px$ $t: y_0 y = p(x + x_0)$, p = Abstand zw. Leitlinie und Brennpunkt

$p x_0 = q$ t = Mittelsenkrechte durch $\left(y = \frac{p}{\sqrt{2pt}} x + \frac{1}{2}\sqrt{2pt}\right)$ an $P(t, \sqrt{2pt})$

Abstand $\overline{PF}$ = Abstand $P \Leftrightarrow$ Leitlinie



Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ $t: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$



Asymptote: $y = \pm \frac{b}{a} x + q$ Parameter: $y = b \cdot \tan(t)$
$x = a / \cos(t)$

Scheitelgleichungen: $y^2 = 2px \pm \frac{b^2 x^2}{a^2}$ $p = \frac{b^2}{a}$ $\varepsilon = \frac{c}{a}$ = Numerische Exzentrität

Hyperbel Ellipse

Alle: $y^2 = 2px + ((\varepsilon^2 - 1) x^2)$, $p = \frac{b^2}{a}$

Komplexe Zahlen (AM)

Diskriminante: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi)$ $z\bar{z} = |z|^2$ $\bar{z} = x - iy$

$z \cdot w = |z||w| \,\text{cis}(\alpha + \beta)$ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

$\sqrt{z} \to \sqrt{\text{Betrag}}$, den $\frac{\text{Winkel}}{2}$

$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|^n (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n$

Kreisteilungsgleichung: $z^n = a$; $z_1 = |z|(\text{cis}(\alpha))$; $|z| = \sqrt[n]{\text{Re}(a)}$

$w = 2 \cdot (z - 3) + 3 \Rightarrow$ Zentrum bei 3, Streckung um 2, Verschiebung um 3

$\tan^{-1}\left(\frac{y\text{-Abschnitt}}{x\text{-Abschnitt}}\right)$ = Drehwinkel $|a|$ = Streckfaktor

Mittelwertsatz

$-\infty < a < b < \infty$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar

Dann existiert $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a)$$

d.h. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist die Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$

Fixpunktsatz

in Banachraum = vollständig normierter Vektorraum

Sei Φ kontrahierend => $\exists$ genau 1 Fixpunkt

Ausserdem gilt, dass jede anwendung von Φ den Abstand zum Fixpunkt verringert: $\|x_k - \bar{x}\| \leq \|x_0 - \bar{x}\| \cdot q^k$

oder gleich lässt

Fixpunkt

Supremumsnorm

$\|f\|_\infty = \sup \|f\| = \|f\|_{C^0}$

C-Norm

ist f m mal stetig diffbar so ist $\|f\|_{C^m} = \max_{s \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0}$

Einige Potenzreihen

$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\exp'(x) = \sum k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(x)$, $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist im innern ihres Konvergenzradius diffbar mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

d.h. wenn $x <$ radius

Prüfe für $x =$ radius

Offen/Geschlossen

$M \subset \mathbb{R}^d$ ist offen falls jedes $x_0 \in M$ ein innerer Punkt ist

$M \subset \mathbb{R}^d$ ist abgeschlossen falls das Komplement $\mathbb{R}^d \setminus M$ offen ist

kompakt = abgeschlossen & beschränkt

Zwischenwertsatz

(Mittelwertsatz S. 14)

$-\infty < a < b < \infty$, f stetig, $f(a) \leq f(b)$ => zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$

Nullstellen

f stetig => min 1 Extremum zwischen zwei Nst.

f' max n Nst => f max n+1 Nst

Fixpunkt

Bedingungen erfüllt => Fixpunkt existiert

denn Satz anwendbar auf $g(x) = x - f(x)$ => $\exists x$ für $y = 0$

Lineares Gleichungssystem

$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f - g \\ 4f - 2g \end{pmatrix} \Rightarrow F' = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}^{F} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

1. EW von F bestimmen (Nst von Charakterist. Polynom)
2. EV bestimmen $(A - I\lambda)v = 0$
3. $T = (v_1 \ v_2)$

$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ g \end{pmatrix}$

=> zeilenweise auflösen

f ist Konvex iff $f''(x) > 0$

Genau dann gilt für alle x_0, x_1 $f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$

Wenn f konvex, dann gilt $f\left(\sum_{i=1}^{n} t x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$ für beliebige zahlen

$f:]a,b[$

K kompakt, f stetig => f(K) kompakt.

Funktionen $f: K \to \mathbb{R}$ nehmen ihr Supremum & Infimum an als Wert

strikt Monoton & stetig => injektiv

=> surjektiv

Aufgabe: Ist f injektiv?

(if $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ monoton wachsend (if f stetig) $\Rightarrow$ injektiv

Surjektiv?

Da $f(1) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ und $\lim_{x \to \infty} = \infty$ folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden $\Rightarrow$ surjektiv

Zwischenwertsatz: stetige Funktionen auf $[a,b]$ nehmen alle Werte an dazw

Aufgabe: Stetig? $f =$ 

mit Lipschitz alle Stetigkeiten folgern. Aus Periodizität folgt aus gleichm. stetig auf $[a,b]$ stetig auf überall

Punktweise Konvergent? gegen $f = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

1-Periodizität $\rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 1$ für $x \in \mathbb{Z}$

Für $x \notin \mathbb{Z}$ reicht mit $x \in [0,1]$ wegen Periodizität

$\Rightarrow$ Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $x \in \left[\frac{1}{2n_0}, 1 - \frac{1}{2n_0}\right]$

also $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

Gleichmässig Konvergent?

Alle Funktionen der Funktionenfolge f_n sind stetig

$\Rightarrow$ kann nicht gegen eine unstetige Grenzfunktion konvergieren. gegebenes f ist unstetig.

$\frac{dF_x}{dx}+\frac{dF_y}{dy}+\frac{dF_z}{dz}$

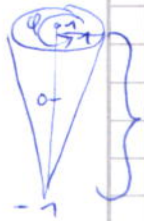
Aufgabe: Oberflächenintegral Kegelmantel

Gesucht: $\iint_M \vec{F}\, dM$ mit $\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -x\cdot y \\ x^2+3z^2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow div(\vec{F}) = 6z$

1. div bestimmen

2. Es gilt mit Gauss (S. 12) $\iint_{(Mantel+Deckel)} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_{Kegel} div(\vec{F})\, d\vec{V}$

Ziel: das berechnen und dann $\iint_{Deckel} \vec{F}\, d\vec{S}$ abziehen



(2) $\iiint_{Kegel} 6z\, r\, dr\, d\varphi\, dz = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{z+1}{2}} 6zr\, dr\, d\varphi\, dz$ enthält variable => zuerst bestimmen (S.11)

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left[3z r^2\right]_0^{\frac{z+1}{2}} d\varphi\, dz = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{3}{4}\left(z^3+2z^2+z\right) d\varphi\, dz = \int_{-1}^{1}\frac{3\pi}{2}\left(z^3+2z^2+z\right)dz$

$= \left[\frac{3\pi}{2}\left(\frac{z^4}{4}+\frac{2z^3}{3}+\frac{1}{2}z^2\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1-1}{4}+\frac{2}{3}(1+1)+\frac{1-1}{2}\right) = \underline{2\pi}$

3. $\iint_{Deckel} \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{Deckel} F\vec{n}\, ds$ $\quad \vec{n}_{Deckel}$ ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ => einfach genug im Vergleich zum Mantel

$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} F_n\, r\, dr\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} x^2+3z^2-3\ r\, dr\, d\varphi$ aber $z=1$ konstant auf dem Deckel

$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} x^2 r\, dr\, d\varphi \underset{x \text{ einsetzen}}{=} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^3\cos^2(\varphi)\, dr\, d\varphi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \int_{0}^{2\pi}\cos^2(\varphi)\, d\varphi$

$= \underline{\frac{\pi}{4}}$

4. Kegel - Deckel $= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$